Studiul undelor staționare transversale în corzile vibrante

Scopul lucrării:

Se studiază propagarea undelor transversale într-o coardă elastică, urmărindu-se obţinerea unor unde staţionare, şi determinarea vitezei de propagare a undelor transversale.

I. Consideraţii teoretice

Undele elastice reprezintă fenomenul de propagare în spațiu, din aproape în aproape a unei perturbații (oscilații), printr-un mediu elastic. În cazul propagării undelor transversale, particulele mediului oscilează perpendicular pe direcţia de propagare. Undele transversale se pot propaga numai în medii solide elastice, deoarece la propagarea lor apar deformări de forfecare (perpendiculare pe direcţia de propagare). În cazul propagării undelor elastice într-un mediu unidimensional, de exemplu într-o coardă (fir elastic cu secțiune constantă), ecuația diferențială ce descrie propagarea undelor transversale este:

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{\frac{T}{\mu}}\cdot\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)$$

Prin identificare cu ecuația diferențială, generală, a undei:

$$\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\Psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (2)$$

se obține viteza frontului de undă, generat într-o coardă, cu densitatea liniară de masă (masa pe unitatea de lungime) $\mu = \frac{m}{l}$, supusă unei tensiuni mecanice T:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \qquad (3)$$

Dacă în coardă se propagă în sens direct unde progresive, iar în sens invers unde regresive, atunci soluția generală a ecuației diferențiale este de forma:

$$\Psi(x,t) = \Psi_p(t - x/v) + \Psi_r(t + x/v) \qquad (4)$$

Pentru oscilaţiile armonice, funcţiile de undă care descriu propagarea undei progresive şi a undei regresive, sunt:

$$\begin{aligned} \Psi_p(t - x/v) &= A\cdot\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = A\cdot\sin(\omega t - kx) \\ \Psi_r(t + x/v) &= A\cdot\sin\left[\omega\left(t + \frac{x}{v}\right) + \pi\right] = A\cdot\sin(\omega t + kx + \pi) \end{aligned} \qquad (5)$$

unde $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ este modulul numărului de undă.

Undele staţionare se formează prin interferenţa unei unde directe (undă progresivă) cu unda reflectată, de o suprafaţă reflectantă (unda regresivă), și sunt descrise de ecuţia:

$$\Psi = \Psi_p + \Psi_r = 2A\cdot\cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (6)$$

sau:

$$\Psi = 2A\cdot\sin(kx)\cdot\cos(\omega t) \qquad (7)$$

Ecuația (7) reprezintă ecuația undelor staționare, sau ecuaţia modurilor de vibraţie într-o coardă. Conform ecuației (7), fiecare punct al mediului elastic va oscila cu o amplitudine constantă în timp, dar distribuită în spațiu după relația:

$$A(x) = 2A \cdot \sin(kx) \tag{8}$$

Acolo unde amplitudinea rezultantă este maximă, $A(x) = \pm 2A$, se obțin maxime de interferenţe, numite ventre. Condiția pentru a obține maxime de interferențe (ventre), este:

$$\sin(kx) = \pm 1 \Rightarrow kx = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ cu } n \in Z \tag{9}$$

de unde se obțin pozițiile pentru ventre:

$$x_v = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{4}, \tag{10}$$

Valorile minime ale amplitudinii rezultante, $A(x) = 0$, se obțin în anumite puncte numite noduri, unde avem minime de interferenţă. Condiția pentru a obține minime de interferență (noduri), este:

$$\sin(kx) = 0 \Rightarrow kx = n \cdot \pi, \text{ cu } n \in Z \tag{11}$$

Adică, pentru poziţiile:

$$x_n = 2n \cdot \frac{\lambda}{4} \tag{12}$$

Se observă că poziţia ventrelor şi nodurilor nu depinde de timp, deci ele rămân nemişcate, de unde şi numele de unde staţionare.

În cazul unei corzi de lungime L, fixată în ambele capete, un tren continuu de unde transversale este reflectat şi re-reflectat de capete. Deoarece coarda este fixă, la capete vor exista noduri. Conform relației (12), distanţa dintre două noduri succesive este egală cu jumătate din lungimea de undă, deci lungimea L a corzii poate fi:

$$\frac{\lambda}{2}, 2 \cdot \frac{\lambda}{2}, 3 \cdot \frac{\lambda}{2}, ..., n \cdot \frac{\lambda}{2} \tag{13}$$

Altfel spus, într-o coardă de lungime L, fixată la ambele capete, pot forma unde staţionare numai undele cu lungime de undă:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \text{ unde } n = 1, 2, 3, ... \tag{14}$$

sau undele cu frecvența:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}, \text{ unde } n = 1, 2, 3, ... \tag{15}$$

Pentru n = 1 se obţine frecvenţa fundamentală, $\nu_1 = \frac{v}{2L}$, căreia îi corespunde modul fundamental de vibraţie (armonica fundamentală), iar pentru celelalte valori ale lui n, în cazul în care nu există pierderi de energie (amortizare), se obţin armonicele superioare: $2\nu_1$, $3\nu_1$, $4\nu_1$,…. Modul fundamental de vibrație, și primele trei armonice superioare, pentru undele staţionare generate într-o coardă fixată la ambele capete, sunt prezentate în Fig. 1.

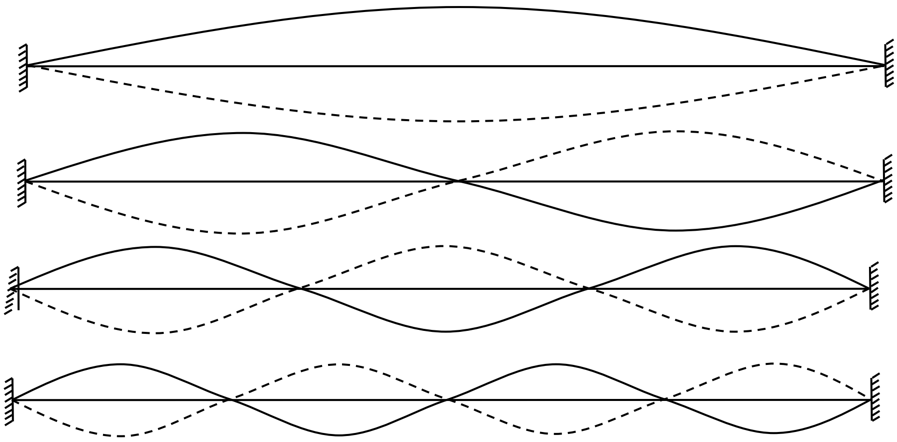

Fig. 1.

II. Metodica experimentală

II.1. Dispozitivul experimental

Dispozitivul experimental este prezentat în Fig. 2, și este format dintr-un suport, pe care este întins un fir de sârmă din cupru (coarda), și un generator de semnal.

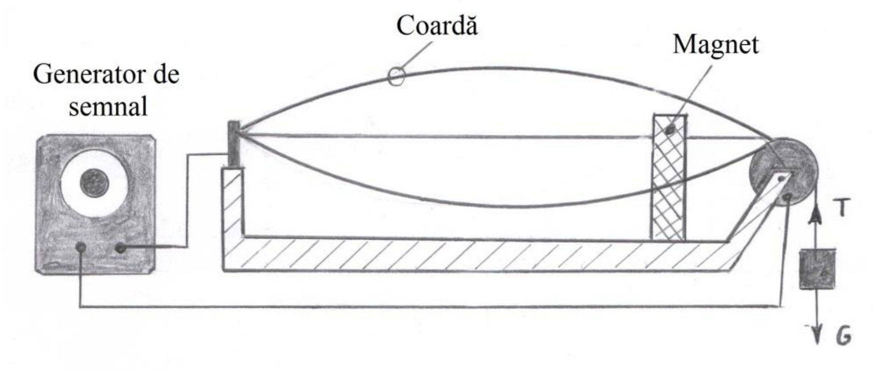

Fig. 2.

Coarda trece printre polii unui magnet permanent și este fixată la un capăt, iar celălalt capăt este trecut peste un scripete fix. De capătul corzii trecut peste scripete se atârnă corpuri de mase diferite, scopul fiind de a tensiona (întinde) coarda în mod diferit ($T = G = m \cdot g$). Prin coardă se trece un curent de audiofrecvenţă, provenit de la un generator de semnal care permite reglarea frecvenţei și nivelului curentului. Excitarea corzii se face prin forţa de interacţiune magnetică, între curentul care străbate coarda şi câmpul magnetic constant produs de magnetul permanent ($F = B \cdot I \cdot L$).

II.2. Modul de lucru

i. Se atârnă un corp de masă cunoscută la capătul corzii trecut peste scripete, pentru tensionarea ei;
ii. Se măsoară lungimea corzii, L, şi diametrul corzii, d, cu ajutorul unei rulete şi a unui micrometru;
iii. Se pornește generatorul de semnal, după ce s-au făcut legăturile electrice cu coarda;
iv. Se modifică frecvența de excitare a corzii până când se constată în coardă, un regim evident de undă staționară;

v. Se citesc frecvențele corespunzătoare modului fundamental, precum și frecvențele corespunzătoare primelor 3 armonice superioare;
vi. Se repetă măsurătorile pentru o altă valoare a greutăţii, plasată la capătul corzii;
vii. Se cunoaște densitatea cuprului $\rho = 8900$ kg/m^3;
viii. Datele obţinute se trec în tabelul 1.

Tabelul 1.

L (m)	d (m)	ρ (kg/m^3)	m (kg)	v_t (m/s)	$\frac{\Delta v_t}{v_t}$ (%)	n	λ_n (m)	ν_n (Hz)	v_{exp} (m/s)	$\frac{\Delta v_{exp}}{v_{exp}}$ (%)
						1				
						2				
						3				
						4				
						1				
						2				
						3				
						4				

II.3. Prelucrarea datelor experimentale

i. Se calculează viteza teoretică de propagare a undelor transversale prin coardă, cu ajutorul relației:

$$v_t = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{m \cdot g}{\pi \cdot \rho}} \tag{16}$$

ii. Se determină lungimile de undă corespunzătoare diferitelor moduri de vibrație, cu ajutorul relației (14);

iii. Se calculează viteza experimentală de propagare a undelor transversale, cu relația:

$$v_{exp} = \lambda_n \cdot \nu_n \tag{17}$$

iv. Se calculează erorile relative cu ajutorul relațiilor:

$$\frac{\Delta v_t}{v_t} = \frac{\Delta d}{d} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta \rho}{\rho}\right) \tag{18}$$

$$\frac{\Delta v_{exp}}{v_{exp}} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \nu}{\nu} \tag{19}$$

Bibliografie

1. P. Păşcuţă, L. Pop, M. Boşca, Fizică. Lucrări practice, Ed. U. T. Press, Cluj-Napoca, 2013.
2. R. Muntean, E. Culea, Fizică. Lucrări practice, Ed. U.T. Press Cluj-Napoca, 2004;
3. http://www.phys.utcluj.ro/PersonalFile/Cursuri/BarleaCurs.html;
4. http://www.phys.utcluj.ro/resurse/studenti.html.